



مدل مفهومی تصور مفهوم - تعریف مفهوم واهمیت آن در آموزش ریاضی

زهره محتشم، کارشناس ارشد آموزش ریاضی و دبیر ریاضی بوشهر

چکیده

عملکردهای ضعیف و دور از انتظار بسیاری از دانش آموزان و حتی دانشجویان، در انجام تکالیف مختلف وابسته به تعریف، ذهن بسیاری از آموزشگران ریاضی را به خود مشغول کرده است. برای توضیح این مسئله، آموزشگران ریاضی بیان می کنند که در واقع، فرایندی که یک دانش آموز در یادگیری مفاهیم ریاضی دنبال می کند، با آنچه که یک ریاضی دان انجام می دهد، متفاوت است. برای توضیح چگونگی شکل گیری مفاهیم ریاضی و نشان دادن نقشی که ساختار مفهومی ذهن شخص در این ساخت و ساز دارد، همچنین برای تحلیل درک دانش آموزان و تعریف های آن ها از مفاهیم مختلف، «مدل شناختی تصور مفهوم - تعریف مفهوم»، به وسیله تال و وینر (۱۹۸۱)، معرفی شد. براساس این مدل، برای هر مفهوم ریاضی یک «تصور مفهوم» و یک «تعریف مفهوم» وجود دارد و بسیاری از مشکلاتی که دانش آموزان در ساخت و درک مفاهیم ریاضی دارند، بستگی به تشخیص تعریف رسمی یک مفهوم توسط فرد و تصور مفهوم وی دارد. در توضیح این مدل، وینر بیان می کند که تصور مفهوم، هنگام حل مسئله و اثبات، نقش اصلی را به عهده دارد و تعریف ها نقشی حاشیه ای دارند. همچنین، ضعف در تصور مفهوم دانش آموزان، ممکن است بازتاب تمرین های نامناسب کتاب درسی یا شیوه آموزشی نامناسب باشد. از جمله راه های بهبود تصور مفهوم برای دانش آموزان، توجه مؤلفان کتاب های درسی بر میزان تأکید و تعیین اولویت تصور یا تعریف مفهوم در برنامه درسی گروه های مختلف دانش آموزان است، همچنین طراحی فعالیت ها و هدایت بحث های کلاسی هدفمند توسط معلمان، برای تشخیص تناقض های دانش آموزان در درک مفهوم، و اتخاذ رویکردهایی مناسب جهت رفع آن ها ضروری است.

کلیدواژه ها: تصور مفهوم، تعریف مفهوم، مدل مفهومی، تعریف های ریاضی.

مقدمه

تحقیقات در آموزش ریاضی نشان داده است که با وجود نقش مهمی که تعاریفها در یادگیری ریاضی و نیز انجام عملیات ریاضی به عهده دارند، تعداد زیادی از دانش آموزان دبیرستانی و فارغ التحصیلان، برای درک تعاریفهای جدید و کاربرد تعاریفها به طور مناسب، دچار مشکل هستند و از نقش تعاریفها در حل مسئله و ایجاد اثباتها آگاهی ندارند (زاسکیس^۱ و لیکن^۲، ۲۰۰۸).

آموزشگران ریاضی بیان می کنند که بخش عمده ای از این مشکلات از تفاوت بین مراحل منطقی (ریاضی) تشکیل مفهوم و فرایندهای ذهنی فرد برای دریافت مفهوم ناشی می شود. در واقع، فرایندی که یک دانش آموز در یادگیری مفاهیم ریاضی دنبال می کند، با آنچه که یک ریاضی دان انجام می دهد، متفاوت است. برای نشان دادن نقشی که ساختار ذهنی مفهومی شخص دارد، «مدل شناختی تصور مفهوم^۳ و تعریف مفهوم^۴» به وسیله تال و وینر (۱۹۸۱) معرفی شد. براساس این مدل، تعداد زیادی از مشکلاتی که دانش آموزان در ساخت معنایی مفاهیم ریاضی دارند، به تشخیص^۵ فرد از تعریف رسمی یک مفهوم و تصویری که وی از آن مفهوم دارد مرتبط است (تال^۶، ۱۹۸۸). در واقع، در فرایند یادگیری یک مفهوم معین، ابتدا در ذهن یک تصور مفهوم و یک تعریف مفهوم ساخته می شود. «تصور مفهوم» یک ساختار شناختی کلی است که به مفهوم وابسته است، اما «تعریف مفهوم»، شکلی از کلماتی است که برای معرفی مفهوم به کار می رود. شخص ممکن است دارای تعریف مفهومی باشد که با تعریف ریاضی آن سازگار نباشد یا تعریف مفهومی که لزوماً مرتبط با تصور مفهوم او نیست. در نتیجه، فاصله ای بین تعریف ریاضی مفهوم و روشی که شخص آن را درک می کند وجود دارد. در ادامه، این مدل با تفصیلی که استفاده از آن را ممکن کند تشریح می شود.

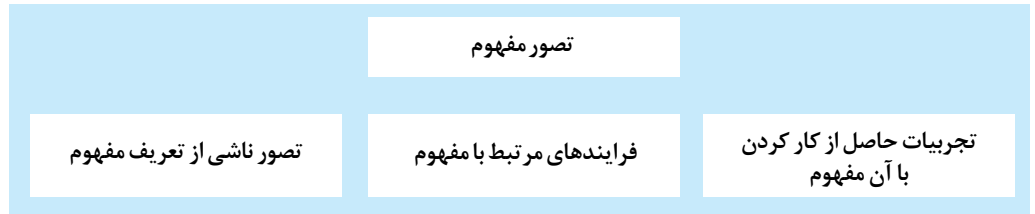
تصور مفهوم و تعریف مفهوم

به گفته وینر^۷ (۱۹۷۶)، اگرچه به نظر می رسد دانش آموزان هیچ تصور خاصی نسبت به ساختار ریاضی «تعریف- قضیه- اثبات» نداشته اند، براساس نظریه پیازه^۸، انسان به ویژه در سال های جوانی، تجارب خود

برای نشان دادن نقشی که ساختار ذهنی مفهومی شخص دارد، «مدل شناختی تصور مفهوم و تعریف مفهوم» به وسیله تال و وینر (۱۹۸۱) معرفی شد. براساس این مدل، تعداد زیادی از مشکلاتی که دانش آموزان در ساخت معنایی مفاهیم ریاضی دارند، به تشخیص فرد از تعریف رسمی یک مفهوم و تصویری که وی از آن مفهوم دارد مرتبط است

را در تعامل با محیط سازمان دهی می کند و حتی بدون اینکه صریحاً چیزی به او گفته شود، می تواند به طور مستقیم، نتایجی را از این تجارب استنباط کند. او اضافه می کند که چگونه در موارد زیادی، دانش آموزان حتی درباره موضوعاتی که برای اولین بار به آنها ارائه می شد تصوراتی داشتند (تارسکی^۹، ۱۹۶۵؛ وینر، ۱۹۷۵ و ۱۹۷۶؛ نقل شده در وینر، ۱۹۷۶). وینر با تأکید بر دیدگاه پیازه درباره تجسم ذهنی^{۱۰}، آن را به حوزه تفکر ریاضی (بیشتر درباره تعریف) گسترش داد و با تأکید بر اهمیت ایجاد یک چارچوب مرجع^{۱۱} برای تصور ذهنی، به کمک تال (۱۹۸۱)، یک مدل ساده برای فرایندهای شناختی به منظور تحلیل فرایند یادگیری بعضی مفاهیم ریاضی (وابسته به تعاریفها) ارائه کرد (وونگ^{۱۲}، ۱۹۸۹). برای این منظور، تال و وینر، برای هر مفهوم، دو سلول (منظور سلول های زیستی نیست) مختلف در ساختار شناختی در نظر گرفتند؛ یک سلول برای تصور مفهوم و دیگری برای تعریف (یا تعریف های) مفهوم که ممکن است یکی از این دو سلول یا هر دو، خالی یا پر باشند؛ اولی شامل هر تصویر ذهنی^{۱۳} از یک مفهوم معین است؛ یعنی اطلاعاتی که مفهوم را برای فرد مشخص می کند، نظیر نمودارها، نمادها و نمایش های کلامی یا اطلاعات عددی و یک مجموعه از خواص وابسته به مفهوم. این مجموعه از خواص، به همراه تصویر ذهنی، «تصور مفهوم» نامیده می شود که طی سال ها، از طریق انواع تجارب شکل می گیرد و در مواجهه شخص با محرک های جدید، تغییر می کند و کامل تر می شود. برای یک مفهوم معین، هر شخص ممکن است تصور مفهومی متفاوتی با دیگران و متناسب با درک و تجارب شخصی خود تشکیل دهد که لزوماً همه بخش های آن با هم مرتبط و سازگار نیستند، یعنی ممکن است تصور مفهوم، حتی شامل بخش های متناقضی هم باشد. همچنین، یک فرد می تواند واکنش های متفاوتی نسبت به یک مفهوم خاص در وضعیت های مختلف نشان دهد که لزوماً، بیانگر همه آنچه که فرد درباره مفهوم می داند نباشد. مثلاً ممکن است فرد در زمان ها یا موقعیت های متفاوت، درباره موضوعی مثل تابع، مثال ها یا توضیحات متفاوتی ارائه کند که تال و وینر (۱۹۸۱)، اصطلاح «تصور مفهوم فراخوانده شده^{۱۴}» را برای چنین وضعیتی انتخاب کردند (شکل ۱).

تصور مفهوم

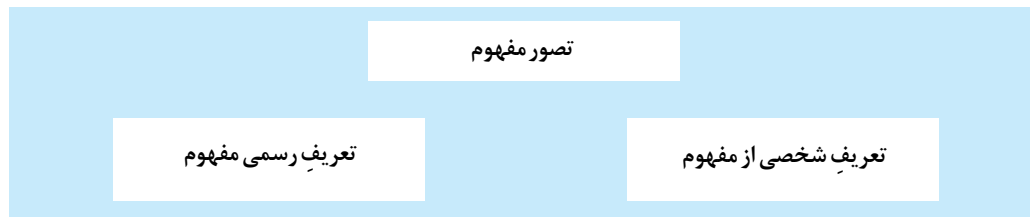


شکل ۱، جوادی، ۱۳۸۶

هم‌چنین، بخشی از سلول تصور مفهوم که حاصل تأثیر سلول تعریف مفهوم بر سلول تصور مفهوم است، «تصور ناشی از تعریف مفهوم» نامیده می‌شود. سلول دومی یعنی تعریف مفهوم، شامل یک تعریف کلامی از مفهوم است که به‌دقت مفهوم را توضیح می‌دهد و یک تعریف رسمی از مفهوم است (شکل ۲).

برای یک مفهوم معین، هر شخص ممکن است تصور مفهومی متفاوتی با دیگران و متناسب با درک و تجارب شخصی خود تشکیل دهد که لزوماً همه بخش‌های آن با هم مرتبط و سازگار نیستند

تصور مفهوم



شکل ۲، جوادی، ۱۳۸۶

در ریاضیات، «تعریف مفهومی» که از سوی اکثریت جامعهٔ ریاضی‌دانان پذیرفته شده است، «تعریف مفهوم رسمی» یا فقط تعریف مفهوم نامیده می‌شود، درحالی‌که یک شکل از کلماتی که هر شخص برای توضیح تصور مفهوم فراخوانده‌اش به کار می‌برد، «تعریف مفهوم شخصی» در نظر گرفته می‌شود. در کل، تعریف مفهوم شخصی ممکن است با تعریف مفهوم رسمی کاملاً متفاوت باشد (شکل ۲). تال و وینر ادعا می‌کنند که ما از طریق تجربیاتمان، با بعضی از مفاهیم آشنا می‌شویم و بدون اینکه تعریف دقیق و مشخصی از آن‌ها داشته باشیم، آن مفاهیم را در زمینه‌های مختلف به کار می‌بریم. این در حالی است که فرد می‌تواند تعریف یک مفهوم را، بدون آنکه تصور مناسبی از آن داشته باشد، فقط به‌خاطر بسپارد (حفظ کند). گیرالدو^{۱۵} و همکاران (۲۰۰۶، نقل شده در جوادی، ۱۳۸۶) بیان می‌کنند که یک «تصور مفهوم جامع»، لزوماً یک تعریف مفهوم درست را در بر نمی‌گیرد و در ساختار شناختی یک مفهوم، هر یک از دو سلول «تصور» و «تعریف» مفهوم،

نشده است و با وجود تهی نبودن سلول تصور مفهوم، تعریف رسمی مفهوم ارائه می‌گردد. حالت دوم نیز زمانی است که یک مفهوم، اولین بار به‌وسیلهٔ تعریفش معرفی می‌شود. در این حالت، سلول تصور مفهوم در ابتدا خالی است و بعد از ارائهٔ چندین مثال و تشریح آن‌ها، به‌تدریج پر می‌شود. با این حال، ممکن است سلول تصور مفهوم، بازتابی از تمام جنبه‌های تعریف مفهوم نباشد. وی در ادامه توضیح می‌دهد که در هر دو حالت- در حالت اول که تصور مفهوم قبلاً شکل گرفته و در حالت دوم که تصور در مراحل بعدی و به‌تدریج، شکل می‌گیرد- اگر تصور مفهوم ساخته شده منطبق بر تعریف مفهوم باشد، مشکلی وجود ندارد و ایده‌آل است. برای مثال، اگر تعریف «محور مختصات» به‌عنوان دو خط متقاطع در نظر گرفته شده باشد و تکالیف و فعالیت‌هایی که دانش‌آموزان برای یادگیری آن انجام داده‌اند با همان دو خط متقاطع باشد، مشکلی به‌وجود نمی‌آید. اما ممکن است وضع همیشه به این منوال نباشد. مثلاً در حالت اول؛ یعنی زمانی که تصور

نال و وینر،
مدل خود
را برای
توصیف بعضی
عامل‌هایی که
ممکن است
مشأ تناقض
شناختی
یادگیرندگان
در مورد مفاهیم
حد دنباله،
حد توابع و
توابع پیوسته
باشد به کار
برند

مفهوم دانش‌آموز از مفهوم محور مختصات، در نتیجه دیدن بسیاری از نمودارها در وضعیت‌های مختلف و به‌صورت دو محور عمود بر هم ایجاد شده باشد، آنچه که در تصور مفهوم او از محور مختصات شکل می‌گیرد، احتمالاً دو محور عمود بر هم خواهد بود. حال بعد از اینکه معلم ریاضی، دستگاه مختصات را به‌صورت دو خط متقاطع معرفی کند، پیش‌بینی می‌شود که یکی از سه حالت زیر اتفاق بیفتد:

۱. تصور مفهوم در جهت تعریف مفهوم تغییر می‌کند؛ یعنی تصور مفهوم فرد، محورهایی را که بر هم عمود نیستند نیز، به‌عنوان دستگاه مختصات در نظر می‌گیرد که این اتفاق، یک بازسازی و تطابق ایده‌ال و مطلوب است.

۲. تصور مفهوم به همان صورت باقی می‌ماند درحالی که سلول تعریف مفهوم در واقع تعریف رسمی ارائه شده توسط معلم را در برمی‌گیرد که اغلب، این تعریف یا به فراموشی سپرده می‌شود یا پس از مدت کوتاهی تحریف می‌گردد. لذا زمانی که مثلاً از دانش‌آموز خواسته می‌شود یک دستگاه مختصات را تعریف کند، او دربارهٔ محورهایی با زاویه‌های ۹۰ درجه صحبت می‌کند و ممکن است که در این حالت، تعریف رسمی به‌طور کامل درک نشود و جذب نگردد.

۳. هر دو سلول به‌همان صورت که بوده‌اند باقی می‌مانند؛ بدین معنی که سلول تصور مفهوم تغییری نمی‌کند و تنها سلول تعریف مفهوم ارائه شده توسط معلم را درون خود حفظ می‌کند و در لحظه‌ای که از او خواسته می‌شود تا یک دستگاه مختصات را تعریف کند، تعریف معلم را عیناً تکرار می‌کند، درحالی که در وضعیت‌های دیگر، او دستگاه مختصات را به‌صورت دو محور عمود بر هم در نظر می‌گیرد.

در حالت دوم، تأثیر سلول تعریف مفهوم بر سلول تصور مفهوم، شبیه سه اتفاق بالاست، یعنی:

● تصور مفهوم بر مبنای تعریف مفهوم شکل می‌گیرد.
● تصور مفهوم با دیدن تمثیل‌ها و کار کردن با آن‌ها، متفاوت از تعریف مفهوم شکل می‌گیرد و تعریف مفهوم فراموش می‌گردد یا تحریف می‌شود. برای مثال، معرفی مفهوم تابع در قالب تعریف، به‌صورت «رابطه‌ای بین دو مجموعه A و B، که هر عضو A فقط با یکی از اعضای B رابطه دارد» عرضه می‌گردد و پس از مدت کوتاهی،

تمام مثال‌های عرضه شده در قالب توابع تک ضابطه‌ای و تک فرمولی ارائه می‌شوند. لذا احتمالاً، تصور مفهوم به‌سمت تک ضابطه‌ای بودن هر تابع می‌رود. برای مثال، یافته‌های تحقیق نشان می‌دهند که اکثر دانش‌آموزان، تناظری را که عدد غیر صفر را به مربعش و صفر را به ۱- نسبت می‌دهد، به‌عنوان تابع قبول نمی‌کنند (وینر ۱۹۸۳ و ۱۹۹۱؛ وینر و دریفوس^۶، ۱۹۸۹؛ نقل شده در جوادی، ۱۳۸۶).

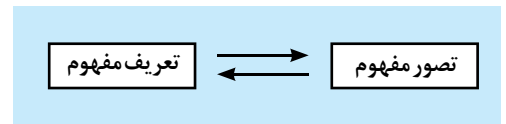
● تصور مفهوم، مستقل از تعریف مفهوم شکل می‌گیرد و تغییری در سلول تعریف مفهوم رخ نمی‌دهد. مثلاً دانش‌آموزان، تعریف را به‌همان صورت رسمی ارائه می‌کنند ولی تناظر مطرح شده در قسمت قبل را به‌عنوان تابع نمی‌پذیرند (وینر ۱۹۸۳ و وینر و دریفوس ۱۹۸۹؛ نقل شده در جوادی، ۱۳۸۶).

وینر (۱۹۹۱) بیان می‌کند که شکل‌گیری یک مفهوم، به‌طور کلی به‌معنای تشکیل یک تصور مفهوم مناسب و جامع برای آن است و تعریف‌های مفهوم بسته به روزمره یا تخصصی بودن، نقش‌های متفاوتی در شکل‌گیری مفهوم به‌عهده دارند. تعریف‌های روزمره، اگرچه به شکل‌گیری تصور مفهوم کمک می‌کنند، اما پس از این شکل‌گیری، تعریف غیرضروری می‌شود و در هنگام کار با آن مفهوم، غیرفعال گشته و حتی ممکن است فراموش شود. درحالی که در زمینه‌های تخصصی، تعریف‌ها نه‌تنها به شکل‌گیری و ساخته شدن مفهوم کمک می‌کنند، بلکه اغلب نقشی حیاتی و مهم در انجام تکالیف و فعالیت‌های شناختی به‌عهده دارند و از اشتباهاتی که با تصور مفهوم آمیخته شده است، جلوگیری می‌کنند. برای مثال، نقطهٔ زاویه‌دار روی نمودار یک تابع، ممکن است براساس تصور مفهوم، یک نقطهٔ عطف محسوب شود، اما براساس تعریف نقطهٔ عطف، چون در این نقطه مماس واحد وجود ندارد، نقطهٔ عطف در نظر گرفته نمی‌شود.

مدل شناختی تصور مفهوم و تعریف مفهوم

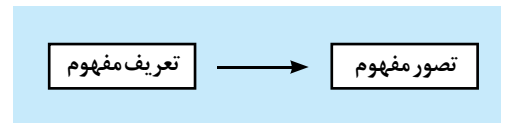
تال و وینر (۱۹۸۱)، فرایند یادگیری مفاهیم ریاضی دانش‌آموزان را بررسی کردند. آن‌ها تفاوت بین استدلال در ریاضی پیشرفته را که براساس تعریف‌های رسمی است- تعریف مفهوم- و استدلالی که دانش‌آموزان

براساس درک خود از مفهوم- تصور مفهوم- به کار می‌برند، توضیح دادند. تال و وینر، مدل خود را برای توصیف بعضی عامل‌هایی که ممکن است منشأ تناقض شناختی یادگیرندگان- شرکت‌کنندگان در تحقیق آن‌ها دانش‌آموزان پایه دوم دبیرستان و دانشجویان دانشگاه- در مورد مفاهیم حد دنباله، حد توابع و توابع پیوسته باشد به کار بردند (ولا^{۱۷}، ۲۰۱۱). تال و وینر، ارتباط متقابل تصور مفهوم و تعریف مفهوم را، حتی زمانی که هر کدام به‌طور مستقل شکل گرفته باشند، به‌صورت زیر مدل‌سازی کردند (شکل ۳).



شکل ۳. فرایند شکل‌گیری مفهوم

وینر (۱۹۹۱) ادعا می‌کند که تعداد زیادی از معلمان ریاضی دوره متوسطه و مدرسان دانشگاهی، فرایند شکل‌گیری مفهوم را فرایندی تک مرحله‌ای می‌دانند (شکل ۴) و معتقدند که تصور مفهوم، به‌وسیله تعریف مفهوم و تحت کنترل آن شکل می‌گیرد.

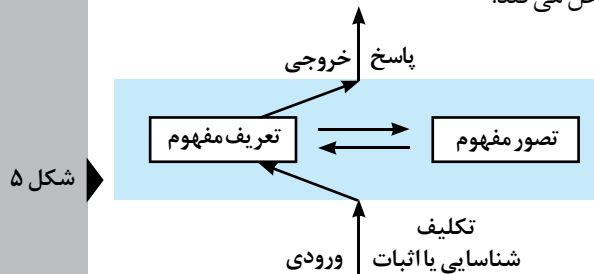


شکل ۴. شکل‌گیری یک مفهوم رسمی

وینر (۱۹۹۱) بیان می‌کند که اگر، برای مثال، از دانش‌آموزی خواسته شود که تشخیص دهد از بین چند نمودار، کدام یک می‌تواند معرف یک تابع باشد، بیشتر معلمان باور دارند که دانش‌آموز، براساس تعریف مفهوم، به این مسئله پاسخ می‌دهد و برایش استفاده از تصور مفهوم اهمیتی ندارد (حمز^{۱۸}، ۲۰۱۲). وینر (۱۹۹۱) مدعی است که پاسخ‌های دانش‌آموزان با توجه به تعریف مفهوم، طی یکی از سه فرایند زیر ارائه می‌شود:

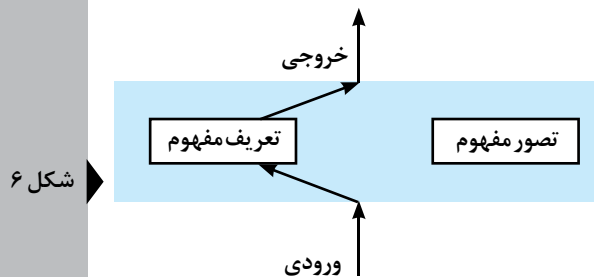
الف. در این حالت، دانش‌آموز، پس از بررسی مسئله، ابتدا تعریف مفهوم را به‌خاطر می‌آورد. بعد به‌کمک تعریف، تصورات وابسته به آن مفهوم از جمله مثال‌ها، نامثال‌ها و به‌طور کلی تجاری را که از دست‌ورزی با آن‌ها، مفهوم را شکل داده است به‌خاطر

می‌آورد. پس از طی این مراحل، جنبه‌های مختلف تعریف مفهوم را درک می‌کند و نحوه به‌کارگیری آن را در مسئله تشخیص می‌دهد و به‌کمک آن مسئله را حل می‌کند.



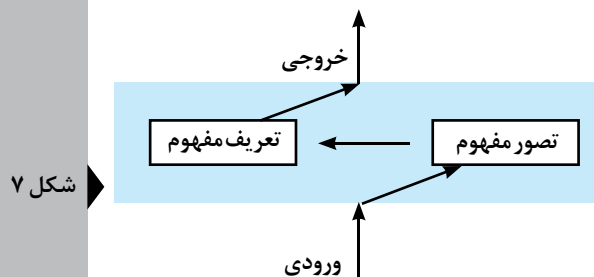
شکل ۵

ب. پس از بررسی مسئله، دانش‌آموز بدون توجه به تصورات مفهوم خود، مستقیماً تعریف مفهوم مناسب با زمینه مسئله را تشخیص و براساس آن پاسخ می‌دهد.



شکل ۶

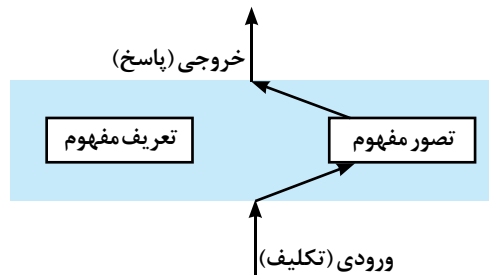
پ. پس از بررسی مسئله، دانش‌آموز ابتدا تصورات وابسته به مفهوم خود را، مانند مثال‌ها و نامثال‌های^{۱۹} کمکی و تجاری که از دست‌ورزی با مفهوم در موقعیت‌های مختلف به‌دست آورده است در نظر می‌گیرد و به‌کمک آن‌ها، تعریف مفهوم را به‌یاد می‌آورد یا بازسازی می‌کند. نهایتاً براساس تعریف مفهوم، مسئله را حل می‌کند.



شکل ۷

اما براساس مدل تال و وینر، این شکل‌ها (۳ و ۴ و ۵)، عملاً آنچه را که اتفاق می‌افتد، نشان نمی‌دهند.

بلکه چیزی که در عمل اتفاق می‌افتد، شبیه فرایندی است که در شکل زیر، توصیف شده است (شکل ۸):



براساس این مدل، دانش‌آموزان اغلب براساس تصور مفهوم خودشان به مسئله پاسخ می‌دهند که وینر (۱۹۹۱) آن را پاسخ شهودی^{۲۰} می‌نامد.

به باور بسیاری از معلمان، موقعی که یادگیرنده درگیر انجام یک فعالیت شناختی می‌شود، هر دو سلول تصور مفهوم و تعریف مفهوم وی فعال می‌شوند؛ باوری که مدل وینر آن‌ها را به چالش می‌کشد.

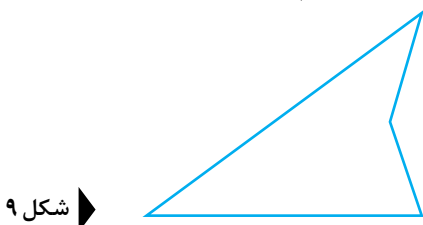
بازتاب مدل مفهومی تال و وینر در تحقیقات آموزش ریاضی

مدل مفهومی تال و وینر چارچوب مفیدی برای مؤلفان کتاب‌های درسی، آموزشگران و معلمان ریاضی جهت درک فرایندهای ذهنی دانش‌آموزان است. این مدل در مطالعات بسیاری از جمله تال و وینر (۱۹۸۱)، هرشکوویتز^{۲۱} و وینر (۱۹۸۴)، هرشکوویتز (۱۹۸۹)، وینر (۱۹۹۱)، روسکین^{۲۲} و رولکا^{۲۳} (۲۰۰۷)، جوادی (۱۳۸۶) و محتشم و همکاران (۱۳۹۱)، برای بررسی مفاهیم تابع، خط مماس بر منحنی، پیوستگی، حد دنباله، انتگرال و عدد زوج، از منظر دانش‌آموزان، دانشجو-معلمان، دانشجویان و معلمان ریاضی به کار گرفته شده است. برای نمونه، می‌توان به مطالعاتی که هرشکوویتز و وینر (۱۹۸۴) و هرشکوویتز (۱۹۸۹) انجام دادند، اشاره کرد. در این مطالعات، علاوه بر دانش‌آموزان، معلمان و دانشجو-معلمان نیز شرکت کردند که همه آن‌ها، باید تکالیف مشابهی را حل می‌کردند. در هر مطالعه، دو پرسش‌نامه به شرکت‌کنندگان داده شده بود؛ در پرسش‌نامه اول از آن‌ها خواسته شده بود در بین مجموعه‌ای از اشکال هندسی شامل زاویه، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه و چهارضلعی، قطر

را مشخص کنند. در پرسش‌نامه دوم، از آن‌ها خواسته شده بود که مثال‌هایی از یک مفهوم نظیر ارتفاع مثلث، ارائه کنند.

از جمله مهم‌ترین نتایج حاصل از این دو مطالعه، می‌توان به موارد زیر اشاره کرد:

- زمانی که از معلمان، دانشجو-معلمان و دانش‌آموزان خواسته شد تکالیف مشابهی انجام دهند، بین سه گروه، بدفهمی‌های یکسانی اتفاق افتاد، یعنی «تصور مفهوم» معلمان و دانشجو-معلمان، فقط کمی از «تصور مفهوم» دانش‌آموزان، بهتر بود (هرشکوویتز، ۱۹۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده در گاتپیرز و جیم، ۱۹۹۹).
- تصور مفهوم تعداد زیادی از معلمان، دانشجو-معلمان و دانش‌آموزان، شامل تعداد کمی از مثال‌های خاص، شکل‌ها و مستقل از تعریف مفهوم آن‌هاست. برای مثال، یک تصور مفهوم مرسوم از قطر چهارضلعی، معمولاً شامل قطرهای داخلی است. لذا فقط یک قطر برای چهارضلعی‌های مقعر^{۲۴} (شکل ۹) رسم می‌شود (هرشکوویتز، ۱۹۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده در گاتپیرز و جیم، ۱۹۹۹).



شکل ۹

- در سؤالاتی که مربوط به شناسایی مفهوم می‌شود، حضور «تعریف مفهوم»، تقریباً هیچ تأثیری روی پاسخ‌ها نداشته است. اما در سؤالی که از دانش‌آموزان خواسته شده بود تا ارتفاع مثلث‌ها را رسم کنند، پاسخ‌هایی که با تعریف ارائه شده بود، به‌طور قابل توجهی بهتر بود (هرشکوویتز، ۱۳۸۹؛ هرشکوویتز و وینر، ۱۹۸۴؛ نقل شده در گاتپیرز و جیم، ۱۹۹۹).

مثال دیگر، مطالعه روسکین و رولکا (۲۰۰۷) درباره یادگیری مفهوم انتگرال معین است که توسط دانش‌آموزان دبیرستانی انجام شد. پژوهشگران، پرسش‌نامه‌ای درباره مفهوم انتگرال و به‌منظور آشکار کردن «تصور مفهوم» دانش‌آموزان طراحی کردند. بر اساس نتایج به‌دست آمده، آن‌ها دریافتند که تعریف‌ها، نقش حاشیه‌ای در یادگیری دانش‌آموزان دارند و

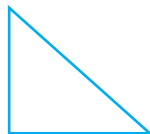
استدلال‌های آن‌ها درباره مفهوم انتگرال به‌طور عمده، براساس «تصور مفهوم» و شهود، صورت می‌گیرد. در ایران نیز دو تحقیق با استفاده از این مدل، یکی توسط جوادی (۱۳۸۶) و دیگری محتشم، غلام‌آزاد و ریحانی (۱۳۹۱) انجام شده است. جوادی (۱۳۸۶) در مطالعه خود، به بررسی درک دانشجویان از مفهوم تابع براساس «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» آن‌ها پرداخت. داده‌های این پژوهش از طریق پرسش‌نامه‌ای شامل ۸ سؤال جمع‌آوری شد. سه سؤال اول، حاوی سه نمودار بود و از شرکت‌کنندگان خواسته شده بود تا نشان دهند کدام یک از آن‌ها، معرف تابع هستند. در سؤال چهارم و پنجم، از دانشجویان خواسته شده بود که مثال‌هایی از دو تابع خاص ارائه کنند که در کتاب درسی، با آن‌ها به‌عنوان «توابع دارای نام» (ثابت و دیریکله) آشنا شده‌اند و پاسخ‌های خود را توضیح دهند. تحلیل پاسخ‌های دانش‌آموزان نشان داد که «تصور مفهوم» بیشتر دانشجویان از تابع، به‌صورت یک قانون یا یک ماشین است. جوادی (۱۳۸۶)، نتیجه گرفت که بخشی از «تصور مفهوم» دانشجویان که تابع را یک قانون می‌داند، مانع از درک «تعریف مفهوم» تابع می‌شود. از این گذشته، محتشم، غلام‌آزاد و ریحانی (۱۳۹۱) نیز در مطالعه خود، دو پرسش‌نامه بین دانش‌آموزان پایه دوم دبیرستان توزیع کردند. محققان در پرسش‌نامه اول، از دانش‌آموزان خواستند که عدد زوج را تعریف کنند. پرسش‌نامه دوم نیز حاوی سه سؤال بود که در سؤال اول، دانش‌آموزان باید تعیین می‌کردند که از بین چندین تعریف برای عدد زوج، کدام‌ها تعریفی برای عدد زوج محسوب می‌شوند. در سؤال دوم و سؤال سوم هم، از دانش‌آموزان خواسته شده بود «مناسب‌ترین» و «ضعیف‌ترین» تعریف عدد زوج را از دیدگاه خود مشخص کرده و پاسخشان را توضیح دهند. تجزیه و تحلیل داده‌ها نشان داد که تصور دانش‌آموزان از عدد زوج، در مراحل مختلف درک مفهوم، مانند ارائه تعریفی برای مفهوم و انتخاب از بین تعریف‌های مختلف مفهوم، «تصور مفهوم» نقش اصلی را به‌عهده دارد.

دسته‌بندی تصورات مفهوم براساس مدل تال و وینر

طبق مدل تال و وینر، زمانی که به یادگیرندگان تکلیفی داده می‌شود، تنها بخشی از سلول «تصور

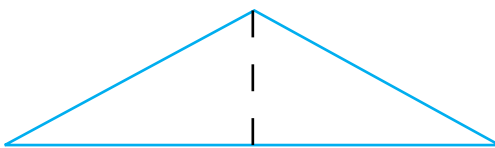
مفهوم»، در لحظات معینی فعال می‌شود. مثلاً، برای اشخاص مختلف، بخش‌های متفاوتی از سلول تصویری و در لحظات متفاوت، فراخوانده می‌شود. در نتیجه، برای درک فرایند شناختی یادگیرندگان، مطالعه «تصورات مفهوم» وابسته به یک مفهوم معین ضرورت دارد. براساس نتایج حاصل از به‌کارگیری این مدل در پژوهش‌های متعدد و متنوع، گاتپیرز و جیم (۱۹۹۹)، «تصور مفهوم» افراد را در سه نوع رفتار^{۲۵} زیر شناسایی کردند:

● **افراد با تصور مفهوم غیر منسجم:** تصور مفهوم این افراد، از تعداد کمی مثال مربوط به یک مفهوم خاص، به‌عنوان «مثال‌های نوعی^{۲۶}» و برخی ویژگی‌های آن مثال‌ها، ایجاد شده است. این افراد، تکلیف‌های جدیدی را که به آن‌ها ارائه می‌شود، با مثال‌ها و ویژگی‌هایی که در «تصور مفهوم» خود دارند، مقایسه می‌کنند. بنابراین، اگر تکلیفی نیازمند درک جنبه دیگری از مفهوم باشد که با آن مثال‌های نوعی متفاوت باشد، آن جنبه را کنار می‌گذارد. برای نمونه، «تصور مفهوم» بسیاری از دانش‌آموزان از یک مثلث قائم‌الزاویه، اغلب شامل یک ضلع قائم و یک ضلع افقی است (شکل ۱۰).



شکل ۱۰

● **افراد با تصور مفهوم تا حدی منسجم:** تصور مفهوم این افراد، علاوه بر تعدادی مثال، برخی ویژگی‌های کلی‌تر مفهوم‌ها نیز وجود دارند که برای بررسی تکلیف‌هایی مربوط به آن‌ها، به‌کار می‌روند. به‌عنوان نمونه، بسیاری از دانش‌آموزان، «تصور مفهوم»‌شان از مثلث، یک سه ضلعی است که فقط زاویه حاده دارد و در نتیجه، همه ارتفاع‌ها داخل مثلث می‌افتند. بنابراین، از نظر این دانش‌آموزان، مثلثی با زاویه منفرجه، تنها یک ارتفاع و آن هم ارتفاع وارد از رأس زاویه منفرجه دارد (شکل ۱۱).



شکل ۱۱

آشکار کردن
«تصور مفهوم»
دانش آموزان،
نه تنها درک
بهتری از نحوه
تفکر آن‌ها را
نشان می‌دهد،
بلکه رویکردهای
بهتری را هم
برای تدریس
پیشنهاد می‌کند

● **افراد با تصور مفهوم منسجم:** این افراد، «تصور مفهوم» منسجم و کاملی دارند، به طوری که این تصور، جنبه‌های مختلف مفهوم را دربرمی‌گیرد. تصور مفهوم این افراد، شامل مثال‌های متنوع، همه ویژگی‌های مهم این مثال‌ها و روابط بین آن‌هاست. این دانش‌آموزان می‌توانند با توجه به کلیت این مثال‌ها و امکان تحلیل ویژگی‌های اصلی مفهوم، در انجام تکلیف‌های متنوع مرتبط با مفهوم، بهتر عمل کنند. برای نمونه، این دانش‌آموزان با انواع مثلث، ویژگی‌ها و تفاوت‌هایشان و نحوه رسم اجزای داخلی آن‌ها کاملاً آشنا هستند. در حقیقت، می‌توان گفت آشکار کردن «تصور مفهوم» دانش‌آموزان، نه تنها درک بهتری از نحوه تفکر آن‌ها را نشان می‌دهد، بلکه رویکردهای بهتری را هم برای تدریس پیشنهاد می‌کند. به هر حال، اغلب آموزشگران و معلمان ریاضی دریافته‌اند که دانش‌آموزان، به واسطه مجموعه خاصی از مثال‌ها، ممکن است «تصور مفهوم» اشتباهی در ذهن خود ایجاد کرده باشند. یعنی، روش ارائه مفهوم‌ها و تعریف‌ها به یادگیرندگان ریاضی، «تصور مفهوم»، «تعریف مفهوم شخصی» و ارتباط بین آن‌ها را شکل می‌دهد تا زمینه مناسب را برای یادگیری معنادار «تعریف مفهوم»، فراهم کند.

بحث و نتیجه‌گیری

در اواخر دهه ۱۹۷۰ و دهه ۱۹۸۰ میلادی، چگونگی تأثیر مثال‌ها و دست‌ورزی‌ها و تجارب پیشین یادگیرندگان ریاضی بر یادگیری تعریف‌های رسمی مفهوم‌های ریاضی و مشکلات آن‌ها در این باره، موضوعی بود که ذهن بسیاری از آموزشگران ریاضی را به خود مشغول کرد. این دغدغه، نیروی محرکه‌ای قوی برای انجام تحقیقات در این حوزه شد که حاصل آن‌ها، در قالب مقالات متعددی منتشر شد (شوارزنبگر^{۲۷} و تال، ۱۹۸۷؛ تال، ۱۹۷۷؛ وینر، ۱۹۸۰؛ وینر و هرشکوویتز، ۱۹۸۰؛ کورنو^{۲۸}، ۱۹۸۱). در این بین، علاقه‌های مشترک نظری و تجربی تال و وینر (۱۹۸۱) باعث شد که آن‌ها بتوانند تلاش‌های مستقل خود را در قالب یک تحقیق طراحی و اجرا کنند. یافته اصلی این تحقیق، تبیین «مدل شناختی تصور مفهوم و تعریف مفهوم» بود. این مدل، ضمن توضیح ارتباط بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» و نقش آن‌ها در شکل‌گیری

یک مفهوم ریاضی، ابزار مناسبی برای تحلیل فرایندهای شناختی یادگیرنده فراهم می‌کند. همچنین، این مدل کمک می‌کند تا تناقض‌های احتمالی بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم» یادگیرندگان، شناخته شود. شناسایی این تناقض‌ها و چگونگی شکل‌گیری آن‌ها، به معلمان این امکان را می‌دهد تا رویکردهای تدریسی مناسب‌تری انتخاب کنند.

به اعتقاد وینر (۱۹۹۱)، در حالی که از نظر بسیاری از معلمان ریاضی و مؤلفان کتاب‌های درسی ریاضی، ارائه تعریف رسمی یک وظیفه می‌باشد، اما آن‌ها نمی‌توانند نسبت به اثرات شناختی این تعریف‌ها بر شکل‌گیری تفکر ریاضی و تصور مفهوم دانش‌آموزان، بی‌تفاوت باشند. بنابراین، با وجود اهمیتی که تعریف‌های رسمی در ریاضی دارند، ارائه به‌موقع آن‌ها مهم است و ضروری است که با اهداف آموزشی در نظر گرفته شده برای دانش‌آموزان تناسب داشته باشد. به عبارت دیگر، بسیاری از تکلیف‌ها، تنها با رجوع به تصور مفهوم و بدون نیاز به تعریف رسمی، فهمیده و انجام می‌شود. در این صورت، با تأکید بر «تصور مفهوم» در کنار ارائه تعریف‌ها، لازم است زمینه ایجاد مناسب آن از طریق عرضه مجموعه‌ای از مثال‌ها که جنبه‌های مختلف مفهوم را نشان می‌دهند، فراهم شود. در عین حال، به دلیل اینکه توانایی کار با تعریف‌های رسمی برای موفقیت در ریاضیات ضروری است، پس لازم است که در طراحی برنامه‌های درسی ریاضی برای دانش‌آموزانی که در رشته‌هایی تحصیل می‌کنند که ریاضی در آن‌ها، نقش زیربنایی و بنیادی دارد، «تصور مفهوم»‌های مناسب برای آمادگی جهت درک مناسب از «تعریف مفهوم» و کاربرد آن در زمینه‌های مختلف، ایجاد شود. این کار زمانی امکان‌پذیر است که به دانش‌آموزان، تکلیف‌هایی داده شود که تنها با رجوع به «تصور مفهوم»، درک و انجامشان ممکن نباشد (وینر، ۱۹۹۱). شناسایی مثال‌ها و نامثال‌های^{۲۹} یک مفهوم، حل مسئله و اثبات‌های ریاضی، از جمله فعالیت‌هایی هستند که باعث می‌شوند دانش‌آموزان، به جای استفاده صرف از «تصور مفهوم»، «تعریف مفهوم» را هم به کار گیرند. از طرف دیگر، نتایج حاصل از تحقیقات مرتبط نشان می‌دهد که در بعضی موارد، معلمان نیز مشکلات

نقش تعریف در یادگیری ریاضی. مقاله ارائه شده در دوازدهمین کنفرانس آموزش ریاضی ایران، شهریورماه ۱۳۹۱، سمنان، اداره آموزش و پرورش سمنان

3. Gutierrez, A., & Jaime, A. (1999). Pre-service primary teachers' understanding of the concept of altitude of a triangle. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 2, 253-275.
4. Hamza, Safia F. (2012) *A Study of Concept Images and Concept Definitions related to Metric Spaces*. PhD thesis, National University of Ireland Maynooth.
5. Rosken, B., & Rolka, k. (2007). Integrating Intuition: The Role of Concept Image and Concept Definition for Students' Learning of Integral Calculus. *The Montana Mathematics Enthusiast*. Monograph 3, pp.181- 204.
6. Schwarzenberger, R. L. E. and Tall, D. O. (1978). Conflict in the learning of realnumbers and limits, *Mathematics Teaching* 82, 44-9
7. Tall, D. O. (1977a). Cognitive conflict and the learning of mathematics. *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Utrecht, Holland.
8. Tall, D. (1988). Concept Image and Concept Definition, Senior Secondary Mathematics Education, (ed. Jan de Lange, Michiel Doorman), *OW&OC Utrecht*, 37- 41.
9. Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and Concept Definition in Mathematics, with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, 12, 151-169.
10. Vela, M. J. (2011). A Snapshot of Advanced High School Students' Understanding of Continuity.
11. Vinner, S. (1976). The Naive Concept of Definition in Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 7, 413- 429.
12. Vinner, S. (1983). Concept definition, Concept Image and the Notion of Function. *Math.Edu.Sci. Technol.* VOL. 14, NO. 3, 293- 305.
13. Vinner, S. & Dreyfus, T. (1989). Images and Definitions for the Concepts of Functions. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20 (5), 356- 366.
14. Vinner, S. (1991). The Role of Definitions in the Teaching and Learning of Mathematics. In D,O. Tall (Ed.), *Advanced Mathematical Thinking*, (pp. 65-81). Dordrecht: Kluwer.
15. Vong, M. C. (1989). *Concept Image and Concept Definition in the Calculus: A Comparison between their Occurrence in History and in the Class*. Unpublished Master Thesis, Concordia University, Montreal, Quebec, Canada.
16. Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying Definitions: A Case of a Square. *Educational Studies in Mathematics*. 69:131-148.

این مقاله، با همکاری سرکار خانم دکتر سهیلا غلام آزاد و سرکار خانم دکتر زهرا گویا بازسازی شده، بدین وسیله، از آن‌ها تشکر می‌کنم. (نویسنده)

مشابهی دارند. یعنی در فرایند یادگیری یک مفهوم، شکاف موجود بین «تصور مفهوم» و «تعریف مفهوم»، به دانش آموزان منحصر نمی‌شود. بلکه در برخی موارد، معلمان نیز به این مشکل دچارند که این نیز به نوبه خود، ممکن است در فرایند یادگیری دانش آموزان، به‌طور جدی اختلال ایجاد کند. در این رابطه، مدل شناختی تال و وینر در تدوین برنامه‌های آموزش معلمان ریاضی، می‌تواند به‌طور جدی مورد توجه قرار گیرد تا **آموزشگران معلمان** با استفاده از آن، قادر به تربیت معلمانی باشند که دارای «تصور مفهوم»های قوی و آمادگی برای درک «تعریف مفهوم»ها باشند.

پی‌نوشت‌ها

1. Zazkis
2. Leikin
3. Concept Image
4. Concept Definition
5. Compartmentalization
6. Tall
7. Vinner
8. Piaget
9. Tarski
10. Mental Imagery
11. Frame of Reference
12. Vong

۱۳. تصویر ذهنی یک اسم (یا یک عبارت) معین در ذهن هر شخص، به عنوان مجموعه همه تصاویر (اطلاعات) وابسته با آن اسم (یا عبارت اسمی) تعریف می‌شود.

14. Evoked Concept Image
15. Giraldo
16. Dreyfus
17. Vela
18. Hamza
19. Nonexamples
20. Intuitive Response
21. Hershkovitz
22. Rosken
23. Rolka

۲۴. چهار ضلعی که یک زاویه آن، از ۱۸۰ درجه بیشتر است.

25. Behavior
26. Typical Examples
27. Schwarzenberger
28. Cornu
29. Nonexamples

منابع

۱. جوادی، مهدی (۱۳۸۶). **تصور مفهوم و تعریف مفهوم از مفهوم تابع**. پایان‌نامه کارشناسی ارشد منتشر نشده آموزش ریاضی. دانشگاه شهیدبهبشتی، تهران.
۲. محتشم، زهرا؛ غلام آزاد، سهیلا و ریحانی، ابراهیم (۱۳۹۱).